11/10/2017
2ο μάθημα

$$\pm(\underbrace{a_N a_{N-1} \dots a_0}_{\text{ακέραιο μέρος}} \cdot \underbrace{a_{-1} a_{-2} \dots}_{\text{κλασματ. μέρος}})_\beta = \sum_{k=-\infty}^{N} a_k \cdot \beta^k = \sum_{k=0}^{N} a_k \beta^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \beta^{-k}$$

Μετατροπή αριθμού με βάση το β σε αριθμό με βάση 10.

1) Ακέραιος

$(a_N a_{N-1} \dots a_0)_\beta = a_0 + a_1\beta + a_2 \cdot \beta^2 + \dots + a_N \cdot \beta^N$: Υπολογισμός του πολυωνύμου $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$, όπου x έχει την τιμή β.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N =$$
$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\dots + x(a_{N-1} + x a_N)) \dots)$$

Αλγόριθμος Σχήματος Horner

```
$y \leftarrow a_N$
Για $k = N-1, N-2, \dots, 0$
    $y \leftarrow a_k + x \cdot y$
Τέλος επανάληψης
```

Η πράξη: $a_k + x \cdot y$ λέγεται flop (floating point operation)

Παράδειγμα: 1) Να μετατραπεί ο $(1234)_5$ στο δεκαδικό σύστημα.

α' τρόπος:

$(1234)_5 = 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = 4 + 15 + 50 + 125 = (194)_{10}$

β' τρόπος (με Horner):

$(1234)_5 = 4 + 5(3 + 5(2 + 5 \cdot 1)) = 4 + 5(3 + 5 \cdot 7) = 4 + 5 \cdot 38 = 194$

2) Να μετατραπεί ο αριθμός $(.10111)_2$ στο δεκαδικό σύστημα

$(.10111) = 1\cdot 2^{-1}+0\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}+1\cdot 2^{-5} =$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} = 0.5+0.125+0.0625+0.03125$
$=(0.71875)_{10}$

Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε αριθμό με βάση β.

Έστω x ο αριθμός με βάση 10 και έστω $(a_N \dots a_1 a_0)_\beta$ ο x στο σύστημα με βάση β.

Τότε

$$x = a_0 + \beta(a_1+\beta(\dots+\beta(a_{N-1}+\beta a_N))\dots)$$

Παρατηρώ ότι a_0 είναι το υπόλοιπο διαίρεσης του $x:\beta$

και $a_1+\beta(\dots+\beta(a_{N-1}+\beta a_N))\dots)$ το πηλίκο.

Το a_1 είναι το υπόλοιπο του πηλίκου διά β κ.ο.κ.

Παράδειγμα: Να μετατραπεί ο αριθμός 194 στο πενταδικό σύστημα

	Υπόλοιπο	Πηλίκο
194 : 5	$a_0=4$	38
38 : 5	$a_1=3$	7
7 : 5	$a_2=2$	1
1 : 5	$a_3=1$	0

$(194)_{10} = (1234)_5$

Μετατροπή κλασματικού αριθμού από βάση 10 σε βάση β.

Έστω x κλασματικός αριθμός του δεκαδικού συστήματος
Αυτός γράφεται ως $x=(.a_{-1}a_{-2}\ldots)_{β}=a_{-1}\cdot β^{-1}+a_{-2}\cdot β^{-2}+\ldots$

Παρατηρούμε ότι εαν πολλαπλασιάσουμε τον x επί β, το a_{-1} θα είναι το ακέραιο μέρος. Ο υπόλοιπος αριθμός εαν πολλαπλασιαστεί επί β θα δώσει ακέραιο μέρος το a_{-2} κ.ο.κ.

Παράδειγμα : 1) Να μετατραπεί ο $(.71875)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα

Λύση

$x=(.71875)$

	ακ. μέρος	
$2\cdot x = 1.4375$	$a_{-1}=1$	$γ_1=.4375$
$2\cdot γ_1 = 0.875$	$a_{-2}=0$	$γ_2=0.875$
$2γ_2 = 1.75$	$a_{-3}=1$	$γ_3=.75$
$2γ_3 = 1.5$	$a_{-4}=1$	$γ_4=.5$
$2γ_4 = 1$	$a_{-5}=1$	$γ_5=0$

$(.71875)_{10}=(.10111)_2$

2) Να μετατραπεί ο $(.1)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα $x=(.1)_{10}$

$2 \cdot x = 0.2$	$a_{-1}=0$	$\boxed{y_1 = .2}$
$2y_1 = .4$	$a_{-2}=0$	$y_2 = .4$
$2y_2 = .8$	$a_{-3}=0$	$y_3 = .8$
$2y_3 = 1.6$	$a_{-4}=1$	$y_4 = .6$
$2y_4 = 1.2$	$a_{-5}=1$	$\boxed{y_5 = .2}$

Παρατηρούμε ότι $y_1 = y_5$. Επομένως $x = (.000110011 0011\ldots)_2$
$= (.0\overline{0011})_2$

Αριθμοί κινητής υποδιαστολής - Σύνολα αριθμών Μηχανής

Ένας αριθμός μη μηδενικός με βάση β γράφεται κανονικά στη μορφή του ως $\pm(.d_1d_2d_3\ldots)_\beta \cdot \beta^e$, όπου $d_1 \neq 0$, d_i ψηφία του συστήματος με βάση β (από 0 εώς β-1) και e ακέραιος

ο $\pi \simeq (3.14159)_{10} = (.314159).10^1$

ο $(.0001)_2 = (.1)_2 \cdot 2^{-3}$

Κάθε μηχανή αποθηκεύει τους αριθμούς στην κανονική τους μορφή με πεπερασμένο πλήθος t ψηφίων και με τον εκθέτη e όπου $L \leq e \leq U$, L,U ακέραιοι, συνήθως $-L=U$

Το εύρος των αριθμών μηχανής θα είναι $(.1)_\beta \cdot \beta^L$ έως $(.d_1d_2 \ldots d_t)_\beta \cdot \beta^U$,
$d_i = \beta - 1$

Το σύνολο αριθμών Μηχανής χαρακτηρίζεται από

1) τη βάση β
2) το μήκος του κλάσματος t
3) κάτω φράγμα L του εκθέτη
4) άνω φράγμα U του εκθέτη.

Συμβολίζεται ως $M = M(\beta, t, L, U)$

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθεί το σύνολο αριθμών Μηχανής $M = M(2, 3, -2, 2)$.
(16 αριθμοί βγαίνουν, βρίσκω τα θετικά κ' τα αρνητικά με ένα −)

Το σύνολο αριθμών Μηχανής Η/Υ σε αυτή ακρίβεια είναι
$M = M(2, 23, -127, 127)$